

# Zur Theorie der Kernrotationen

Von LOTHAR MEICHSNER \*

(Z. Naturforschg. 16 a, 1119—1124 [1961]; eingegangen am 10. März 1961)

Calculations of the moments of inertia of heavy nuclei without taking into account nucleonic interactions yielded values about twice the experimental ones. Such calculations were done at the Max-Planck-Institut für Physik for some rare-earth nuclei<sup>1</sup>. A paper<sup>2</sup> written by the author at the same institution offers a better agreement already if the nucleonic interactions again are neglected. It considers the fact that the nucleons do not move independently of one another in the rotating system of coordinates since introduction of EULERIAN angles necessarily imposes secondary conditions on the relative coordinates of the nucleons. In consequence of this, an additional energy term, called „Zwangsergie“, occurs. After presenting the main results of the mentioned paper it is shown that this additional term alters energy differences entering the effective reciprocal moments of inertia in the sense of enlarging these moments, i. e., diminishing the effective moments of inertia, and that this contribution is not negligible. The presented theory differs from that of INGLIS by treating the rotations of the axially deformed potential quantum-mechanically instead by the help of a classical angular velocity<sup>3</sup>.

Berechnungen der Trägheitsmomente von Kernen der seltenen Erden ohne Berücksichtigung der Nukleonenwechselwirkungen, z. B. die von HACKENBROICH<sup>1</sup>, aus dem Max-Planck-Institut für Physik, ergaben etwa das Doppelte der gemessenen Werte. Eine am gleichen Institut angefertigte und 1958 veröffentlichte Arbeit<sup>2</sup> bietet eine Möglichkeit, die Übereinstimmung zu verbessern, ohne auf die Nukleonenwechselwirkung einzugehen. Sie berücksichtigt, daß sich die Nukleonen im rotierenden Koordinatensystem nicht unabhängig voneinander bewegen, da die Einführung von EULERSchen Winkeln Nebenbedingungen für die Relativkoordinaten zur Folge hat. Es tritt ein zusätzlicher, als Zwangsergie bezeichneter Energieterm auf; dadurch werden Energiedifferenzen in den Ausdrücken für die effektiven Trägheitsmomente verändert.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst die wichtigsten Ergebnisse der genannten Arbeit<sup>2</sup> erläutert. Bei den Näherungen in den Energieformeln wird konsequenter vorgegangen, indem die Schwankungen der Kernform in allen Termen vernachlässigt werden.

## 1. Zerlegung des Hamilton-Operators

Der HAMILTON-Operator des Kerns sei

$$\mathcal{H} = \sum_{\nu=1}^A \frac{1}{2M} |\mathbf{p}_\nu|^2 + \mathcal{J}(\mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\tau}_1, \dots, \mathbf{r}_A \mathbf{p}_A \boldsymbol{\sigma}_A \boldsymbol{\tau}_A). \quad (1)$$

Von der Wechselwirkungsenergie  $\mathcal{J}$  nehmen wir außer den üblichen Invarianzeigenschaften nur an, daß für die Abhängigkeit von den Impulsen ledig-

lich lineare Glieder von Bedeutung sind, so daß wir schreiben können

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \sum_\nu \mathbf{p}_\nu \cdot (\partial \mathcal{J} / \partial \mathbf{p}_\nu)_0. \quad (2)$$

Dabei soll gelten

$$\mathbf{p}_\nu \cdot (\partial \mathcal{J} / \partial \mathbf{p}_\nu)_0 = (\partial \mathcal{J} / \partial \mathbf{p}_\nu)_0 \cdot \mathbf{p}_\nu. \quad (3)$$

Jetzt wird der zerlegte HAMILTON-Operator  $\mathcal{H}'$  eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &\equiv \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_{ia} + \mathcal{H}_i, \\ \mathcal{H}_a &\equiv \frac{1}{2} \Theta \cdot \cdot \mathbf{J}^2, \\ \mathcal{H}_{ia} &\equiv -\mathbf{W} \cdot \mathbf{J}, \\ \mathcal{H}_i &\equiv \sum_\nu \left\{ \frac{1}{2M} |\mathbf{p}_\nu|^2 + \mathbf{p}_\nu \cdot (\partial \mathcal{J} / \partial \mathbf{p}_\nu)_0 \right\} \\ &\quad + \mathcal{J}_0 + \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} - \frac{1}{2} \Theta \cdot \cdot \mathbf{J}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Operatoren  $\Theta$  und  $\mathbf{W}$  sind bestimmte Funktionen der elementaren dynamischen Variablen der Nukleonen; der symmetrische Tensor  $\Theta$  enthält nur die Lagen, der axiale Vektor  $\mathbf{W}$  außerdem die Impulse und die Spins.

Das Kennzeichnende an  $\mathcal{H}'$  ist die Vertauschbarkeit von  $\mathcal{H}_i$  mit einer von den Nukleonenlagen abhängigen Achsenrichtung  $\mathbf{N}$ , die so bestimmt ist: In einem rotierenden Koordinatensystem  $\Sigma$ , dessen  $z$ -Achse mit  $\mathbf{N}$  zusammenfällt, verschwinden von den

\* Mainz, Am Fort Gonsenheim 41.

<sup>1</sup> H. HACKENBROICH, Z. Naturforschg. 16 a, 1068 [1961]. Der Verfasser dankt dem Herausgeber für die Übermittlung des Manuskripts dieser Arbeit.

<sup>2</sup> L. MEICHSNER, Nucl. Phys. 8, 493 [1958].

<sup>3</sup> Preprints in English are available.



Massenquadrupolmomenten<sup>4</sup>

$$\Gamma_m \equiv (\sqrt{4\pi}/5) \sum_r r_r^2 Y_{2m}(\vartheta_r, \varphi_r) \quad (5)$$

die mit  $m = \pm 1$ , oder, anders ausgedrückt,  $\mathbf{N}$  ist eine der drei durch die Massenquadrupolmomente bestimmten Hauptachsen des Kerns. Da  $\mathcal{H}_i$  außerdem invariant ist gegen Drehungen um  $\mathbf{N}$ , lassen sich die Zustandsfunktionen des Kerns aufbauen aus Produkten  $D_{JM\Omega}\Phi_\Omega$ ; die  $\Phi_\Omega$  sind geeignete Funktionen der Nukleonen-Relativkoordinaten mit  $\Gamma_{\pm 1}\Phi_\Omega = 0$  und scharfem  $z$ -Drehimpuls  $\hbar\Omega$ , und die  $D_{JM\Omega}$  sind die Eigenfunktionen des kräftefreien symmetrischen Kreisels.

$\Theta$  und  $\mathbf{W}$  kommutieren ebenfalls mit  $\mathbf{N}$ .  $\Theta$  ist der *reziproke* Trägheitstensor der inkompressiblen wirbelfreien Strömung<sup>5</sup>, bezieht sich jedoch nur auf Drehungen senkrecht zu  $\mathbf{N}$ , so daß nur  $\Theta_{xx}, \Theta_{yy}, \Theta_{xy} = \Theta_{yx}$  von Null verschieden sind<sup>6</sup>.  $\mathbf{W}$ , dessen  $z$ -Komponente verschwindet, beschreibt eine kollektive Rotation bei festem  $\mathbf{N}$ , und  $\mathcal{H}_{ia}$  verknüpft diese mit der durch  $\mathcal{H}_a$  gegebenen äußeren Rotation. Die Rotation von  $\Sigma$  erfolgt ohne Drehung um  $\mathbf{N}$  (Tau-melbewegung).

Wegen

$$\Theta \sim (\Gamma_0^2 - \frac{2}{3}|\Gamma_2|^2)^{-2} \quad \text{und} \quad \mathbf{W} \sim (\Gamma_0^2 - \frac{2}{3}|\Gamma|^2)^{-2}$$

können für die  $\Phi_\Omega$  nur Funktionen zugelassen werden, die für  $\Gamma_0^2 \rightarrow \frac{2}{3}|\Gamma_2|^2$  hinreichend stark verschwinden, andernfalls ergeben sich keine endlichen Werte für die in der Energie auftretenden Matrixelemente von  $\Theta$  und  $\mathbf{W}$  mit den  $\Phi_\Omega$ . Stellt man die Zustandsfunktion eines Kerns als Linearkombination von Produkten  $D_{JM\Omega}\Phi_\Omega$  mit  $\Gamma_{\pm 1}\Phi_\Omega = 0$  dar, so verschwinden die sich ergebenden  $\Phi_\Omega$  für  $\Gamma_0^2 \rightarrow \frac{2}{3}|\Gamma_2|^2$  offenbar nicht, und der zerlegte HAMILTON-Operator  $\mathcal{H}'$  kann nicht angewendet werden: es ist  $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ . Daher kann ein Kernzustand i. allg. nicht lediglich aus Produkten  $D_{JM\Omega}\Phi_\Omega$  mit dem geforderten asymptotischen Verschwinden aufgebaut werden; es müssen Funktionen herangezogen werden, die nicht dem Definitionsbereich von  $\mathcal{H}'$  angehören. Diese Notwendigkeit entfällt für einen im Mittel hinreichend stark deformierten rotationsellipsoidischen Kern. Die Schwankungen der Kernform sind dann klein gegen die mittlere Verformung, und Konfigu-

rationen mit  $\Gamma_0^2 \simeq \frac{2}{3}|\Gamma_2|^2$  treten so selten auf, daß sie fortgelassen werden können.

Aus Symmetriegründen müssen die Produkte  $D_{JM\Omega}\Phi_\Omega$  in Kombinationen

$$\Psi_{JM\Omega} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \{ D_{JM\Omega}\Phi_\Omega + w(-)^{J-\Omega} D_{JM,-\Omega}\Phi_{-\Omega} \}, \quad \Omega > 0, \quad (6)$$

aufreten, wo  $w$  die Parität ist.  $\Phi_{-\Omega}$  geht durch die Spiegelung an der  $xz$ -Ebene aus  $\Phi_\Omega$  hervor; hierbei ist auf die Zweideutigkeit infolge des Spins Rücksicht zu nehmen.  $\Phi_{-\Omega}$  wird nur in Sonderfällen benötigt. Für  $\Omega = 0$  gilt an Stelle von (6)

$$\Psi_{JM0}^\pm \equiv D_{JM0}\Phi_0^\pm; \quad w(-)^J = \pm 1. \quad (7)$$

Die als Indizes gesetzten Vorzeichen kennzeichnen das Verhalten bei Spiegelungen an der  $xz$ -Ebene.

## 2. Energieberechnung

Zustände mit scharfem  $\mathbf{N}$  hängen in verwinkelner Weise von den Nukleonenkoordinaten ab. Tatsächlich ist die volle Schärfe von  $\mathbf{N}$  nicht erforderlich; es genügen Funktionen mit annähernd scharfem  $\mathbf{N}$ , nur ist zu berücksichtigen, daß die Unschärfe von  $\mathbf{N}$  nicht eine Folge der Bewegung dieser Achse in  $\Sigma$  ist und daher mit keiner kinetischen Energie verknüpft sein darf. Das leistet gerade der in  $\mathcal{H}_i$  enthaltene Anteil

$$\mathcal{H}_z \equiv \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} - \frac{1}{2}\Theta \cdot \mathbf{J}^2. \quad (8)$$

Da seine Addition zu dem unzerlegten HAMILTON-Operator das mit  $\mathbf{N}$  vertauschbare  $\mathcal{H}_i$  entstehen läßt, ist  $\langle -\mathcal{H}_z \rangle$  der Energieanteil infolge der Bewegung von  $\mathbf{N}$ , oder, mit Vorzeichenwechsel ausgedrückt,  $\langle \mathcal{H}_z \rangle$  ist die zur Unterdrückung der Bewegung von  $\mathbf{N}$  erforderliche Energie (Zwangsgenergie).

Zustände  $\Phi_\Omega$  mit annähernd scharfem  $\mathbf{N}$  sind die SLATER-Determinanten, gebildet aus den Nukleonen-Eigenfunktionen zu einem in  $z$ -Richtung deformierten Potential mit Spin-Bahn-Kopplung. Bei hinreichend starker Deformation liegt  $\mathbf{N}$  mit überwiegender Wahrscheinlichkeit in einem schmalen Kegel um die  $z$ -Achse. Es ist allerdings vorteilhafter, die deformierten Funktionen durch einen unmittelbar auf die Eigenfunktionen zum Kugelpotential wirkende Deformationsprozeß zu gewinnen, wozu Festsetzun-

<sup>4</sup> Die in <sup>3</sup> eingeführten Massenquadrupolmomente sind konjugiert-komplex zu den hier benutzten.

<sup>5</sup> A. BOHR, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. **26**, 14 [1952]; **27**, 16 [1953]. — A. BOHR u. B. MOTTELSON, Rotational States of Atomic Nuclei, Ejnar Munksgard Forlag,

København 1954; K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. **30**, 1 [1955].

<sup>6</sup> Dieser Tensor wurde vom Verfasser im Oktober 1951 im Max-Planck-Institut für Physik angegeben.

gen über die Änderung der Spinanteile zu treten haben (Abkopplungsgrad).

$\Theta$  und  $\mathbf{W}$  hängen von der Kerngestalt ab; sie enthalten die Massenquadrupolmomente  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_{\pm 2}$  sowie das Massenmoment nullter Ordnung

$$\Gamma \equiv \sum_v r_v^2. \quad (9)$$

Bei Vernachlässigung der Schwankungen der Kernform ergibt sich

$$\Theta = \Theta_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_{\pm} = \Theta_B J_{\pm} + i \sqrt{6} G \Pi_{2, \pm 1}, \quad (10)$$

mit den Abkürzungen

$$\Theta_B \equiv \frac{2}{3 M \langle \Gamma \rangle} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{2 \gamma} \right), \quad (11)$$

$$G \equiv \frac{2}{3 M \langle \Gamma \rangle} \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \equiv \langle \Gamma_0 \rangle / \langle \Gamma \rangle.$$

Die  $\Pi_{2M}$  sind die folgenden Deformationsimpulse:

$$\Pi_{2M} \equiv \sum_v \pi_{v, 2M},$$

$$\pi_{2, \pm 2} \equiv \sqrt{\frac{3}{8}} \{x p_x - y p_y \pm i(x p_y + y p_x)\},$$

$$\pi_{2, \pm 1} \equiv \mp \sqrt{\frac{3}{8}} \{z(p_x \pm i p_y) + x \pm i y\} p_z,$$

$$\pi_{20} \equiv z p_z - \frac{1}{2} (x p_x + y p_y). \quad (12)$$

$\gamma$  ist ein Maß für die Abweichung des Kerns von der Kugelform. Betrachtet man diesen als ein Ellipsoid konstanter Dichte mit den Halbachsen  $a = b$  und  $c$ , so wird mit der Festsetzung  $a^2 c = R^3$

$$c = R \left( \frac{1+2\gamma}{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq R(1+\gamma),$$

$$a = R \left( \frac{1-\gamma}{1+2\gamma} \right)^{\frac{1}{6}} \simeq R(1-\gamma/2). \quad (13)$$

Die Berechnung der Energie verlangt einen Ansatz für  $\mathcal{J}$ . Es ist aber wünschenswert, von speziellen Annahmen über die Kernkräfte unabhängig zu sein. Da es nur auf die Energieänderung infolge der Deformation des Kerns ankommt, möchte man annehmen, daß diese genügend genau erfaßt wird durch ein mittleres Potential, das sich proportional zum Kern verformt. Bei Zugrundelegung des Oszillatorenpotentials kann man setzen

$$V = \frac{M \omega^2}{2} \{ (x^2 + y^2) e^{i\gamma} + z^2 e^{-2i\gamma} \} - \lambda \frac{\omega^2}{M c^2} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}. \quad (14)$$

Die Konstante  $\zeta$  ist ein Maß für die Verknüpfung der Verformungen von Kern und Potential;  $\zeta = 1$  bedeutet gleiches Ausmaß beider Verformungen. Für kleine  $\gamma$  wird dann

$$\langle \mathcal{J} \rangle \simeq \frac{M \omega^2}{4} \langle \Gamma \rangle \{1 - \zeta(2 - \zeta) \gamma^2\} - \lambda \frac{\omega^2}{M c^2} \left\langle \sum_v \mathbf{l}_v \cdot \mathbf{s}_v \right\rangle. \quad (15)$$

Es zeigt sich, daß für den wichtigen Fall  $\zeta \simeq 1$  das erste Glied praktisch unabhängig ist von der zusätzlichen durch die Deformation des Potentials bzw. der Zustände herrührenden Abweichung des Kerns von der Kugelform. Dabei ist vorausgesetzt, daß das Verhältnis der Spinanteile in den Nukleonenfunktionen konstant gehalten wird.

Der Grundzustand eines Kerns ist in der niedrigsten Näherung i. allg. durch das  $\Psi_{JM\Omega}$  mit dem niedrigsten  $\langle \mathcal{H}_i \rangle$  und  $J = \Omega$  gegeben (Dominante). In nächster Näherung treten durch die Wirkung der Operatoren  $\mathcal{H}_z$  und  $\mathcal{H}_{ia}$  Beimengungen anderer  $\Psi_{JM\Omega}$  hinzu.  $\mathcal{H}_z$  vermittelt Übergänge zwischen inneren Zuständen vom gleichen  $\Omega$ , die sich voneinander durch Umbesetzung zweier Nukleonenzustände unterscheiden. Die von  $\mathcal{H}_{ia}$  bewirkten Übergänge verlaufen zwischen Zuständen mit um 1 verschiedenen Werten für  $\Omega$ ; die zugehörigen inneren Zustände unterscheiden sich voneinander durch die Umbesetzung eines Nukleons. In beiden Fällen sind nur Umbesetzungen innerhalb der gleichen Unterschale von Bedeutung. Die Anzahl der zur Dominante hinzutretenden  $\Psi_{JM\Omega}$  wächst mit der Zahl der teilbesetzten Unterschalen; ihr Gesamtanteil ist im wesentlichen durch den Zahlwert von  $\Theta_B$  bestimmt.

### 3. Vergleich mit der Schwerpunktbewegung

Die angegebene Zerlegung des HAMILTON-Operators steht in Parallelle zu dessen Aufteilung beim Abtrennen der Schwerpunktbewegung. In diesem Fall ergibt sich

$$\mathcal{H}_a \equiv \frac{1}{2 A M} |\mathbf{P}|^2; \quad \mathcal{H}_{ia} \equiv 0; \quad (16)$$

$$\mathcal{H}_i \equiv \sum_v \frac{1}{2 M} |\mathbf{p}_v|^2 + \mathcal{J} - \frac{1}{2 A M} |\mathbf{P}|^2; \quad \mathbf{P} \equiv \sum_v \mathbf{p}_v.$$

$\mathcal{H}_i$  kommutiert mit dem Schwerpunkt  $\mathbf{R}$ . Es ist daher möglich, Eigenzustände von  $\mathcal{H}_i$  mit scharfem  $\mathbf{R}$  aufzustellen. Benutzt man an deren Stelle Zustandsfunktionen mit annähernd scharfem  $\mathbf{R}$ , so bedeutet  $(1/2 A M) |\mathbf{P}|^2$  die mit der Schwerpunktbewegung

verknüpfte kinetische Energie. Für nicht zu kleine  $A$  ist sie vernachlässigbar, so daß man das gleiche für das  $\mathcal{H}_i$  der Rotation vermuten könnte. Das trifft jedoch nicht zu. Die Glieder mit  $\Theta$  hängen erheblich von der Konfiguration ab und wirken im Sinn einer Vergrößerung der Kerndeformation. Dieser Einfluß ist bei schweren Kernen unbedeutend. Die erste Eigenschaft macht sich dagegen in den Termabständen der Rotationsspektren bemerkbar, wie anschließend gezeigt wird.

#### 4. Rotationszustände

Ist ein Kern im Grundzustand hinreichend stark verformt, so können angeregte Zustände existieren, die sich vom Grundzustand durch eine kollektive Rotation des Kerns ohne Änderung der inneren Struktur unterscheiden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Kerne mit  $J=0$  im Grundzustand. In nullter Näherung sind die Zustandsfunktionen nach (7) für den Grundzustand

$$\Psi_0 = \Psi_{000}^{\pm} \equiv D_{000} \Phi_0^{\pm} \quad (17)$$

und für die Rotationszustände ( $J$  gerade)

$$\Psi_{JM} = \Psi_{JM0}^{\pm} \equiv D_{JM0} \Phi_0^{\pm}. \quad (18)$$

Bei Vernachlässigung der kleinen Unterschiede in der Deformation wird die Energiedifferenz nach (4) und (10)

$$E_J - E_0 = \frac{\hbar^2}{2} \Theta_B J(J+1). \quad (19)$$

In nächster Näherung treten zu der Zustandsfunktion des Grundzustandes weitere mit  $\Omega=0$ . Sie sind auch in den angeregten Zuständen vorhanden, und zwar mit etwas veränderten Anteilen. In den angeregten Zuständen sind außerdem durch Vermittlung des Operators  $\mathcal{H}_{ia}$  Zustandsfunktionen mit  $\Omega=1$  anwesend, deren Anteile mit steigendem  $J$  wachsen. Beimengungen mit  $\Omega \geq 2$  sind klein von höherer Ordnung. An Stelle von (17) und (18) haben wir

$$\Psi_0 = \sum_k c_0^{(k)} \Psi_{000}^{(k)}; \quad \Psi_{000}^{(k)} \equiv D_{000} \Phi_0^{(k)}; \quad (20)$$

$$\Psi_{JM} = \sum_k c_J^{(k)} \Psi_{JM0}^{(k)} + \sum_l c_J^{(l)} \Phi_{JM1}^{(l)}; \\ \Psi_{JM0}^{(k)} \equiv D_{JM0} \Phi_0^{(k)};$$

$$\Psi_{JM1}^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ D_{JM1} \Phi_1^{(l)} \mp D_{JM,-1} \Phi_{-1}^{(l)} \}. \quad (21)$$

$k$  numeriert die inneren Zustände mit  $\Omega=0$ ,  $l$  die mit  $\Omega=1$ .  $k=0$  bedeutet die in (17) und (18)

allein vorhandene und dort nicht besonders bezeichnete Dominante. Das Verhalten bei Spiegelungen an der  $xz$ -Ebene ist nicht mehr angegeben.

$\mathcal{H}_z$  hat Nichtdiagonalelemente zwischen Zuständen mit dem gleichen,  $\mathcal{H}_{ia}$  zwischen Zuständen mit um 1 verschiedenem  $\Omega$ ; die Summe der Beiträge zur Gesamtenergie dieser Elemente ist in beiden Fällen negativ. Es gilt exakt

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{JM1}^{(l)} | \mathcal{H}_{ia} | \Psi_{000}^{(0)} \rangle & \quad (22) \\ & = -\frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} \langle \Phi_1^{(l)} | W_+ | \Phi_0^{(0)} \rangle \sqrt{J(J+1)}. \end{aligned}$$

Bei Anwendbarkeit der Störungsrechnung ergibt sich an Stelle von (19)

$$\begin{aligned} E_J - E_0 = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \Theta_B - \frac{\Theta_B^2}{\hbar^2} \sum_l \frac{|\langle \Phi_1^{(l)} | J_+ | \Phi_0^{(0)} \rangle|^2}{E_{J1}^{(l)} - E_{J0}^{(0)}} \right\} \\ \cdot J(J+1). \quad (23) \end{aligned}$$

Die Unterschiede in der Deformation wurden wieder vernachlässigt, es wurde  $c_J^{(k)} = c_0^{(0)}$  angenommen, dann liefern die zusätzlichen Zustände mit  $\Omega=0$  keinen Beitrag zu  $E_J - E_0$ , und in der Näherung (10) für  $W_+$  wurde das Glied mit  $\Pi_{2,+1}$  fortgelassen, da es nur einen Beitrag  $\sim \gamma^2$  liefert.  $E_{J1}^{(l)}$  und  $E_{J0}^{(0)}$  sind die Gesamtenergien von  $\Psi_{JM1}^{(l)}$  und  $\Psi_{JM0}^{(0)}$ . An die Stelle des hydrodynamischen reziproken Trägheitsmoments ist das effektive reziproke Trägheitsmoment

$$\Theta_M = \Theta_B - \frac{\Theta_B^2}{\hbar^2} \sum_l \frac{|\langle \Phi_1^{(l)} | J_+ | \Phi_0^{(0)} \rangle|^2}{E_{J1}^{(l)} - E_{J0}^{(0)}} \quad (24)$$

getreten, und es gilt  $\Theta_M < \Theta_B$ , (25)

wie die folgende Überlegung beweist. In (24) ist

$$\begin{aligned} E_{J1}^{(l)} - E_{J0}^{(0)} & = \langle \Phi_1^{(l)} | \mathcal{H}_0 | \Phi_1^{(l)} \rangle \quad (26) \\ & - \langle \Phi_0^{(0)} | \mathcal{H}_0 | \Phi_0^{(0)} \rangle \\ & + \frac{1}{2} \Theta_B \{ \langle \Phi_1^{(l)} | J_x^2 + J_y^2 | \Phi_1^{(l)} \rangle \\ & - \langle \Phi_0^{(0)} | J_x^2 + J_y^2 | \Phi_0^{(0)} \rangle - \hbar^2 \}. \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_0$  ist der in  $\mathcal{H}_i$  enthaltene ursprüngliche HAMILTON-Operator; die an erster Stelle stehende Differenz in (26) bezieht sich auf die nicht durch die Nebenbedingungen eingeschränkte Bewegung der Nukleonen in  $\Sigma$ . Die Differenz ist positiv, weil die Zustände  $\Phi_1^{(l)}$  aus  $\Phi_0^{(0)}$  durch Anheben eines Nukleons in einen höheren Zustand der gleichen Unterschale hervorgehen. An der nächsten Stelle steht die Differenz der Zwangsenergien. Auch hier ist der Beitrag von  $\Pi_{2,\pm 1}$  in  $W_\pm$  vernachlässigt; dieser liefert zwar einen erheblichen Anteil zur Zwangsenergie, doch ändert sich dieser nur unbedeutend mit dem Zu-

stand. Die Differenz ist ebenfalls positiv, weil durch das Anheben des Nukleons eine Auflöckerung in den besetzten Zuständen der Unterschale eintritt, und übertrifft die an letzter Stelle stehende Differenz der reinen Rotationsenergien  $\langle \mathcal{H}_a \rangle$ . Folglich ist  $E_{J1}^{(l)} - E_{J0}^{(0)} > 0$ , und das führt auf (25).

## 5. Vergleich mit anderen Theorien

Die scheinbare Verkleinerung des reziproken Trägheitsmomentes tritt schon bei einer konsequenter Durchführung der ursprünglichen Theorie von BOHR<sup>5</sup> auf, wie LÜDERS<sup>7</sup> bemerkt hat, der ebenfalls (24) erhält; nur fehlen bei ihm die Differenzen der Zwangsenergien, so daß der zweite Term in (24) größer ausfällt<sup>8</sup>. LÜDERS hat weiter gezeigt, daß sein effektives reziprokes Trägheitsmoment mit dem von INGLIS<sup>9</sup> angegebenen übereinstimmt. Schreibt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} E_{J1}^{(l)} - E_{J0}^{(0)} &\equiv F_{J1}^{(l)} - F_{J0}^{(0)} + Z_1^{(l)} - Z_0^{(0)}, \\ F_{J1}^{(l)} - F_{J0}^{(0)} &\equiv \langle \Phi_1^{(l)} | \mathcal{H}_0 | \Phi_1^{(l)} \rangle \\ &\quad - \langle \Phi_0^{(0)} | \mathcal{H}_0 | \Phi_0^{(0)} \rangle - \frac{1}{2} \hbar^2 \cdot \Theta_B, \\ Z_1^{(l)} - Z_0^{(0)} &\equiv \frac{1}{2} \Theta_B \{ \langle \Phi_1^{(l)} | J_x^2 + J_y^2 | \Phi_1^{(l)} \rangle \\ &\quad - \langle \Phi_0^{(0)} | J_x^2 + J_y^2 | \Phi_0^{(0)} \rangle \}, \end{aligned} \quad (27)$$

so ist also

$$\Theta_I = \Theta_B - \frac{\Theta_B^2}{\hbar^2} \sum_l \frac{|\langle \Phi_1^{(l)} | J_z | \Phi_0^{(0)} \rangle|^2}{F_{J1}^{(l)} - F_{J0}^{(0)}}. \quad (28)$$

Aus (24), (27) und (28) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Theta_M &= \Theta_B - \frac{\Theta_B^2}{\hbar^2} \sum_l \frac{|\langle \Phi_1^{(l)} | J_z | \Phi_0^{(0)} \rangle|^2}{F_{J1}^{(l)} - F_{J0}^{(0)}} \\ &\quad \cdot \left( 1 - \frac{Z_1^{(l)} - Z_0^{(0)}}{E_{J1}^{(l)} - E_{J0}^{(0)}} \right) \\ &= \Theta_I + \frac{\Theta_B^2}{\hbar^2} \sum_l \frac{|\langle \Phi_1^{(l)} | J_z | \Phi_0^{(0)} \rangle|^2}{F_{J1}^{(l)} - F_{J0}^{(0)}} \frac{Z_1^{(l)} - Z_0^{(0)}}{E_{J1}^{(l)} - E_{J0}^{(0)}} \\ &= \Theta_I + f(\Theta_B - \Theta_I), \end{aligned} \quad (29)$$

wo  $f$  ein Mittelwert für  $(Z_1^{(l)} - Z_0^{(0)})/(E_{J1}^{(l)} - E_{J0}^{(0)})$  ist. Aus den bei HACKENBROICH<sup>1</sup> angegebenen Deformationen lassen sich die Werte berechnen, die  $f$  haben muß, wenn  $\Theta_M$  mit dem experimentellen Wert

übereinstimmen soll. Man findet

$$f \simeq 0,15 \dots 0,35.$$

Andererseits erlaubt eine provisorische Energierechnung die Angabe einer unteren Grenze  $f_{\min}$ . Der tatsächliche Wert von  $f$  wird i. allg. ein (beliebiges) Vielfaches von  $f_{\min}$  betragen. Es zeigt sich, daß der erwähnte notwendige Wert von  $f$  im Bereich von  $(1 \dots 13) \cdot f_{\min}$  liegt, für die meisten Kerne beträgt er  $(2 \dots 3) \cdot f_{\min}$ . Damit ist erwiesen, daß die Zwangsenergie einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag zu den reziproken Trägheitsmomenten liefert. Ob sie zur Übereinstimmung mit den experimentellen Werten führt, kann nur die ausführliche Energierechnung entscheiden, bei der übrigens die zweite störungstheoretische Näherung wahrscheinlich nicht ausreichen wird.

Die Zwangsenergie ist eine kinematische Notwendigkeit. Es wäre verfehlt, die Diskrepanz zwischen berechneten und gemessenen reziproken Trägheitsmomenten lediglich durch eine verfeinerte Berücksichtigung der nuklearen Wechselwirkungen beheben zu wollen. Andererseits haben Rechnungen unter Berücksichtigung der Paarungsenergie etwas zu hohe Werte für die reziproken Trägheitsmomente ergeben, so daß die zusätzliche Berücksichtigung der als notwendig erkannten Zwangsenergie noch höhere Werte liefern sollte. Daher ist es wünschenswert zu klären, ob die alleinige Berücksichtigung der Zwangsenergie zur Übereinstimmung mit den experimentellen Werten führt.

Die vorgetragene Theorie hat mit der von INGLIS<sup>9</sup> die Rotation eines axial deformierten Potentials gemein. Während aber INGLIS eine klassische Winkelgeschwindigkeit einführt, wird die Rotation der Deformationsachse hier quantenmechanisch behandelt, denn diese Achse fällt praktisch mit einer Hauptachse des Kernellipsoids, also mit einer dynamischen Variablen, zusammen. Einen weiteren Unterschied zu INGLIS ergibt die Betrachtung von Kernen mit  $J \neq 0$  im Grundzustand. Nach INGLIS tritt zu der Energie der Nukleonen bei ruhendem Potentialtopf ein positiver Rotationsterm. Das steht nicht im Einklang damit, daß der rotierende Potentialtopf den

<sup>7</sup> G. LÜDERS, Z. Naturforsch. **11 a**, 617 [1956].

<sup>8</sup> Der Verfasser machte Herrn LÜDERS seinerzeit aufmerksam, daß ihm der Einfluß von Beimengungen mit  $\Omega=1$  auf das effektive reziproke Trägheitsmoment seit längerem bekannt sei, daß bei ihm der zweite Term in (24) kleiner ausfallen

und die Gefahr einer negativen Energiedifferenz im Nenner nicht bestünde. Er wies auch darauf hin, daß Beimengungen von  $\Omega=J-1$  zu  $\Omega=J$  das magnetische Moment von der BOHRSCHEN Kurve fortdrücken.

<sup>9</sup> D. R. INGLIS, Phys. Rev. **96**, 1059 [1954].

Grundzustand besser darstellt als der ruhende. In unserer Theorie kommt die kollektive Rotation durch das Hinzutreten der Operatoren  $\mathcal{H}_z$ ,  $\mathcal{H}_a$ ,  $\mathcal{H}_{ia}$  zu  $\mathcal{H}_0$  zum Ausdruck; der in  $\mathcal{H}_z$  enthaltene Anteil mit  $\Pi_{2,\pm 1}$  liefert einen erheblichen negativen Beitrag

und schafft die Möglichkeit der Energieerniedrigung infolge der kollektiven Rotation.

Der Verfasser dankt Dr. H. KÜMMEL für eine wertvolle Diskussion, insbesondere für den Hinweis auf die Bedeutung der Paarungsenergie.

## Untersuchungen an Steinmeteoriten mit extrem hohem Edelgasgehalt

### I. Der Chondrit Pantar

Von H. KÖNIG, K. KEIL, H. HINTENBERGER, F. WLOTZKA und F. BEGEMANN

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie (Otto-Hahn-Institut), Mainz

(Z. Naturforschg. 16 a, 1124—1130 [1961]; eingegangen am 4. August 1961)

Large amounts of excessive helium and neon have been found in the veined chondrite Pantar. The absolute amounts as well as the isotopic compositions are similar to those found in Staroye Pesyanoe and Ka poeta.

The meteorite shows light areas which are surrounded by dark regions. The dark color is caused by tiny veins mainly consisting of newly formed troilite, which presumably has been produced during a thermometamorphosis and simultaneous addition of material.

An investigation of the separated fractions shows the excessive helium and neon to be contained almost completely within the dark fraction, i. e. the part of the meteorite which has undergone severe metamorphic changes.

The ammonium content of Pantar is the same as that of other chondrites.

Problems related to the existence of primordial gases in meteorites are discussed in view of the results presented.

Bis vor wenigen Jahren konnten die in Meteoriten gefundenen geringen Edelgasmengen als ausschließlich durch radioaktiven Zerfall oder durch die Wechselwirkung der kosmischen Strahlung mit dem Meteoritenmaterial entstanden erklärt werden. Als erste fanden GERLING und LEWSKIJ<sup>1</sup> jedoch in dem Achondriten Staroye Pesyanoe außergewöhnlich große Mengen an Helium, Neon und Argon mit Isotopenzusammensetzungen ähnlich den irdischen, die nicht auf diese Weise entstanden sein konnten. Sie zogen den Schluß, daß diese Edelgase Reste einer Uratmosphäre seien, in welcher die ursprüngliche Meteoritenmaterie kondensierte. Während dieser Fall zunächst als große Ausnahme galt, wurden in jüngster Zeit jedoch die Ergebnisse von weiteren Untersuchungen an Steinmeteoriten veröffentlicht, die zeigen, daß auch andere Meteorite große Mengen von Edelgasen enthalten, die als Urgase angesehen wurden. So fand REYNOLDS<sup>2</sup> große Mengen eingeschlossenen Urgases in dem kohligen Chondriten Murray und geringere Mengen in dem Chondriten Richardton, während ZÄHRINGER und GENTNER<sup>3</sup> ähn-

liche Beobachtungen an den beiden Chondriten Ka poeta und Abee machten. Über größere Mengen „überschüssigen“ Neons und Argons in fünf kohligen Chondriten und einem Ureiliten, einem diamantenthaltigen Achondriten, berichtet STAUFFER<sup>4</sup>.

Jetzt fanden wir in dem Chondriten Pantar ebenfalls große Mengen der leichten Edelgase, und es scheint, als ob die Anwesenheit von überschüssigen Edelgasmengen in Meteoriten eine weit häufigere Erscheinung ist, als zunächst allgemein und auch von uns selbst auf Grund mehrerer negativ verlaufener Nachforschungen an Howarditen (Achondriten vom gleichen Typ wie Staroye Pesyanoe) angenommen wurde.

### I. Mineralogisch-petrographische Untersuchung

Am 16. Juni 1938, 8.45 Uhr, ging bei Pantar, Lanao, Philippinen ( $8^{\circ} 04' N$ ;  $124^{\circ} 17' E$ ) ein Chondritenregen nieder. Es wurden 16 Meteorite aufgesammelt, deren Gesamtgewicht in der Literatur nicht angegeben ist<sup>5-7</sup>.

<sup>1</sup> E. K. GERLING u. L. K. LEWSKIJ, Dokl. Akad. Nauk, SSSR **110**, 750 [1956].

<sup>2</sup> J. H. REYNOLDS, Phys. Rev. Letters **4**, 351 [1960].

<sup>3</sup> J. ZÄHRINGER u. W. GENTNER, Z. Naturforschg. **15 a**, 600 [1960].

<sup>4</sup> H. STAUFFER, Geochim. Cosmochim. Acta **24**, 70 [1961].

<sup>5</sup> H. J. DETRICE, Pop. Astron., Northfield, Min. **54**, 191 [1946].

<sup>6</sup> H. H. NININGER, Pop. Astron., Northfield, Min. **46**, 578 [1938].

<sup>7</sup> H. H. NININGER, Pop. Astron., Northfield, Min. **54**, 252 [1946].